Теорема Эйлера и порядки

Функция Эйлера $\varphi(n)$ находит количество чисел от 1 до n включительно, взаимно простых с n.

1. Найдите $\varphi(p^k)$, где p — простое число.

2. Докажите, что $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab)$ для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b.

3. Выведите формулу для $\varphi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k})$.

4. Теорема Эйлера. Докажите, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ для любых взаимно простых натуральных чисел a и n.

5. Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Пусть НОД$(a, n) = 1$, наименьшее натуральное число d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod n$ называется *порядком* числа a по модулю n и обозначается $\mathrm{ord}_n(a)$.

6. Докажите, что, если $a^d \equiv 1 \pmod n$, то $d \,\vdots\, \mathrm{ord}_n(a)$.

7. Докажите, что $2^{n!} - 1 \,\vdots\, n$ для всех нечётных $n \in \mathbb{N}$.

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что по крайней мере одно из чисел $2^{2^n} + 1$ и $6^{2^n} + 1$ является составным.

9. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что $n \mid 2^n - 1 \,\vdots\, n$.

10. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых $\frac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n-2} \in \mathbb{Z}$.

11. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что $2^{n-1} + 1 \,\vdots\, n$.

12. Полезная лемма. Пусть НОД$(a, b) = 1$ и число p простое. Докажите, что каждый простой делитель дроби $\frac{a^p - b^p}{a-b}$ либо равен p, либо даёт остаток 1 при делении на p.

13. Даны последовательности (a_n) натуральных чисел и (p_n) простых чисел такие, что для каждого $n \geqslant 1$ выполнены условия: $p_n | a_n$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009} - 1)$. Докажите, что в последовательности a_n найдётся число, кратное 2018.

14. Бесконечное множество $S \subset \mathbb{N}$ назовём *хорошим*, если для любых трёх попарно различных элементов a, b и c множества S все натуральные делители числа $\frac{a^c - b^c}{a-b}$ принадлежат S. Докажите, что для каждого натурального числа $n > 1$ существует хорошее множество, не содержащее n.